Hipoteza Jakobianowa oraz rozszerzenia mocno normalne ciał różniczkowych

Zbigniew Hajto

Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Jagielloński

29 XI 2018

Twierdzene L.A. Campbella (Math. Ann. 1973)

C - ciało algebraicznie domknięte charakterystyki zerowej,
$F = (F_1, \ldots, F_n) : C^n \to C^n$ - odwzorowanie wielomianowe,
$F_i \in C[x_1, \ldots, x_n]$,
$J_F = [\frac{\partial F_i}{\partial x_j}]_{1 \leq i,j \leq n}$ - macierz Jacobiego odwzorowania F.

Twierdzenie 1

Odwzorowanie wielomianowe F jest wielomianowo odwracalne wtedy i tylko wtedy, gdy $\det(J_F) = \mathrm{const} \neq 0$ oraz rozszerzenie ciał funkcyjnych $C(F_1, \ldots, F_n) \subset C(x_1, \ldots, x_n)$ jest rozszerzeniem Galois.

Arno van den Essen w swojej monografii *Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture* (Birkhäuser 2000) udowodnił Twierdzenie Campbella przy założeniu $char(C) = 0$.

Redukcja do stopnia 3

H. Bass, E. Connell, D. Wright, *The Jacobian Conjecture: Reduction of Degree and Formal Expansion of the Inverse*, Bulletin of the American Mathematical Society 7 (1982), 287-330.

Hipotezę Jakobianową wystarczy udowodnić przy następujących założeniach:

$$n \geq 2 \quad \textit{oraz} \quad F = (x_1 + H_1, \ldots, x_n + H_n),$$

gdzie $H_i = 0$ lub H_i jest wielomianem jednorodnym stopnia 3.

Rozszerzenia Picarda-Vessiota

$(\mathcal{K}, \Delta_{\mathcal{K}})$ - ciało różniczkowe cząstkowe,
$\Delta_{\mathcal{K}} = \{\partial_1, \ldots, \partial_m\}$ - rodzina komutujących derywacji,
$C_{\mathcal{K}} = \bigcap_{i=1}^{n} ker(\partial_i)$ - algebraicznie domknięte ciało stałych,

$\partial_i Y = A_i Y$, $i = 1, \ldots, m$, $A_i \in M_{n \times n}(\mathcal{K})$ system liniowy w formie macierzowej.

Dla rozszerzenia ciał cząstkowych $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}$ definiujemy *macierz fundamentalną* systemu liniowego:
$y \in GL_n(\mathcal{L})$ taką, że $\partial_i y = A_i y$ for $i = 1, \ldots, m$.

Powyższy system liniowy nazywamy *całkowalnym*, gdy posiada macierz fundamentalną.

Rozszerzenia Picarda-Vessiota

$(\mathcal{K}, \Delta_{\mathcal{K}})$ - ciało różniczkowe cząstkowe,
$\Delta_{\mathcal{K}} = \{\partial_1, \ldots, \partial_m\}$ - rodzina komutujących derywacji,
$C_{\mathcal{K}} = \bigcap_{i=1}^{n} ker(\partial_i)$ - algebraicznie domknięte ciało stałych,

$\partial_i Y = A_i Y$, $i = 1, \ldots, m$, $A_i \in M_{n \times n}(\mathcal{K})$ system liniowy w formie macierzowej.

Dla rozszerzenia ciał cząstkowych $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}$ definiujemy *macierz fundamentalną* systemu liniowego:
$y \in GL_n(\mathcal{L})$ taką, że $\partial_i y = A_i y$ for $i = 1, \ldots, m$.

Powyższy system liniowy nazywamy *całkowalnym*, gdy posiada macierz fundamentalną.

Rozszerzenia Picarda-Vessiota

Definicja 1

Rozszerzenie ciał różniczkowych $(\mathcal{K}, \Delta_{\mathcal{K}}) \subset (\mathcal{L}, \Delta_{\mathcal{L}})$ jest *rozszerzeniem Picarda-Vessiota,* gdy istnieje całkowalny system liniowy $\partial_i Y = A_i Y$, $i = 1, \ldots, m$.
Taki, że:

- $C_{\mathcal{K}} = C_{\mathcal{L}}$,
- $\mathcal{L} = \mathcal{K}(\{y_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,n})$,
  dla macierzy fundamentalnej $y = \{y_{ij}\} \in GL_n(\mathcal{L})$.

Definicja E. Kolchin (1952)

E. R. Kolchin, *Picard-Vessiot theory of partial differential fields*, Proceedings of the American Mathematical Society **3**, 1952, pp. 596-603.

$(\mathcal{K}, \Delta_{\mathcal{K}})$ - ciało różniczkowe charakterystyki zerowej,
Θ - komutatywny monoid operatorów różniczkowych generowanych elementami zbioru $\Delta_{\mathcal{K}}$
$\Theta(k)$ - podzbiór Θ operatorów rzędu co najwyżej k,

$$W_{\theta_1 \ldots \theta_n}(\eta_1, \ldots, \eta_n) = \begin{vmatrix} \theta_1\eta_1 & \ldots & \theta_1\eta_n \\ & \ldots & \\ \theta_n\eta_1 & \ldots & \theta_n\eta_n \end{vmatrix}$$ wrońskian uogólniony.

Definicja E. Kolchin (1952)

E. R. Kolchin, *Picard-Vessiot theory of partial differential fields*, Proceedings of the American Mathematical Society **3**, 1952, pp. 596-603.

$(\mathcal{K}, \Delta_{\mathcal{K}})$ - ciało różniczkowe charakterystyki zerowej,
Θ - komutatywny monoid operatorów różniczkowych generowanych elementami zbioru $\Delta_{\mathcal{K}}$
$\Theta(k)$ - podzbiór Θ operatorów rzędu co najwyżej k,

$$W_{\theta_1 \dots \theta_n}(\eta_1, \dots, \eta_n) = \begin{vmatrix} \theta_1\eta_1 & \dots & \theta_1\eta_n \\ & \dots & \\ \theta_n\eta_1 & \dots & \theta_n\eta_n \end{vmatrix}$$ wrońskian uogólniony.

Definicja E. Kolchin (1952)

Definicja 2

Rozszerzenie ciał różniczkowych $(\mathcal{K}, \Delta_{\mathcal{K}}) \subset (\mathcal{L}, \Delta_{\mathcal{L}})$ jest rozszerzeniem *Picarda-Vessiota*, gdy:

- $C_{\mathcal{K}} = C_{\mathcal{L}}$,
- Istnieją elementy $\eta_1, \ldots, \eta_n \in \mathcal{L}$ liniowo niezależne nad ciałem stałych takie, że $\mathcal{L} = \mathcal{K}\langle \eta_1, \ldots, \eta_n \rangle$ oraz

$$\forall \theta_1, \ldots, \theta_n \in \Theta(n) : \frac{W_{\theta_1, \ldots, \theta_n}(\eta_1, \ldots, \eta_n)}{W_{\theta_{01}, \ldots, \theta_{0n}}(\eta_1, \ldots, \eta_n)} \in \mathcal{K}, \qquad (1)$$

dla pewnych ustalonych $\theta_{01}, \ldots, \theta_{0n}$ takich, że $W_{\theta_{01}, \ldots, \theta_{0n}}(\eta_1, \ldots, \eta_n) \neq 0$.

Definicja 1 i Definicja 2 są równoważne.

Definicja E. Kolchin (1952)

Definicja 2

Rozszerzenie ciał różniczkowych $(\mathcal{K}, \Delta_{\mathcal{K}}) \subset (\mathcal{L}, \Delta_{\mathcal{L}})$ jest rozszerzeniem *Picarda-Vessiota*, gdy:

- $C_{\mathcal{K}} = C_{\mathcal{L}}$,
- Istnieją elementy $\eta_1, \ldots, \eta_n \in \mathcal{L}$ liniowo niezależne nad ciałem stałych takie, że $\mathcal{L} = \mathcal{K}\langle \eta_1, \ldots, \eta_n \rangle$ oraz

$$\forall \theta_1, \ldots, \theta_n \in \Theta(n) : \frac{W_{\theta_1, \ldots, \theta_n}(\eta_1, \ldots, \eta_n)}{W_{\theta_{01}, \ldots, \theta_{0n}}(\eta_1, \ldots, \eta_n)} \in \mathcal{K}, \qquad (1)$$

  dla pewnych ustalonych $\theta_{01}, \ldots, \theta_{0n}$ takich, że $W_{\theta_{01}, \ldots, \theta_{0n}}(\eta_1, \ldots, \eta_n) \neq 0$.

Definicja 1 i Definicja 2 są równoważne.

T. Crespo, Z. Hajto, *Picard-Vessiot theory and the Jacobian problem*, Israel Journal of Mathematics **186**, 2011, pp. 401-406.

Derywacje Nambu

Dla rozszerzenia ciał funkcyjnych $C(F_1, \ldots, F_n) \subset C(x_1, \ldots, x_n)$

definiujemy derywacje Nambu:

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix} = (J_F^{-1})^T \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad \delta_j = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_{j-1}}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial F_{j-1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_{j+1}}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial F_{j+1}}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Zauważmy, że

$$\delta_j F_i = \begin{cases} 0 & if \quad i \neq j \\ 1 & if \quad i = j \end{cases}, \quad (J_F)^{-1} = \begin{bmatrix} \delta_1 x_1 & \ldots & \delta_1 x_n \\ & \ldots & \\ \delta_n x_1 & \ldots & \delta_n x_n \end{bmatrix}.$$

Derywacje Nambu

Dla rozszerzenia ciał funkcyjnych $C(F_1, \ldots, F_n) \subset C(x_1, \ldots, x_n)$

definiujemy derywacje Nambu:

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix} = (J_F^{-1})^T \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad \delta_j = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_{j-1}}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial F_{j-1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_{j+1}}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial F_{j+1}}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Zauważmy, że

$$\delta_j F_i = \begin{cases} 0 & if \quad i \neq j \\ 1 & if \quad i = j \end{cases}, \quad (J_F)^{-1} = \begin{bmatrix} \delta_1 x_1 & \ldots & \delta_1 x_n \\ & \ldots & \\ \delta_n x_1 & \ldots & \delta_n x_n \end{bmatrix}.$$

Różniczkowa wersja Twierdzenia Campbella

Twierdzenie 2 (C-H, 2011)

Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki zerowej oraz $F = (F_1, \dots, F_n) : K^n \to K^n$ odwzorowaniem wielomianowym takim, że $J = \det(J_F) \in K \setminus \{0\}$. Następujące cztery warunki są równoważne:

- Odwzorowanie F jest automorfizmem wielomianowym.
- Ciało różniczkowe $(K(x_1, \dots, x_n), \{\delta_1, \dots, \delta_n\})$jest rozszrerzeniem Picarda-Vessiot ciała K.
- Skończone rozszerzenie ciał $K(F_1, \dots, F_n) \subset K(x_1, \dots, x_n)$jest rozszerzeniem Galois.
- Elementy $x_1, \dots, x_n$ spełniają warunek $W_{\delta_1,\dots,\delta_n}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ oraz

$$\frac{W_{\theta_1,\dots,\theta_n}(x_1, \dots, x_n)}{W_{\delta_1,\dots,\delta_n}(x_1, \dots, x_n)} \in K(F_1, \dots, F_n)$$

dla dowolnie wybranych n operatorów $\theta_1, \dots, \theta_n \in \Theta(n+1)$, z monoidu Θ generowanego przez $\delta_1, \dots, \delta_n$.

Różniczkowa wersja Twierdzenia Campbella

Twierdzenie 2 (C-H, 2011)

Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki zerowej oraz $F = (F_1, \ldots, F_n) : K^n \to K^n$ odwzorowaniem wielomianowym takim, że $J = \det(J_F) \in K \setminus \{0\}$. Następujące cztery warunki są równoważne:

- Odwzorowanie F jest automorfizmem wielomianowym.
- Ciało różniczkowe $(K(x_1, \ldots, x_n), \{\delta_1, \ldots, \delta_n\})$jest rozszrerzeniem Picarda-Vessiot ciała K.
- Skończone rozszerzenie ciał $K(F_1, \ldots, F_n) \subset K(x_1, \ldots, x_n)$jest rozszerzeniem Galois.
- Elementy $x_1, \ldots, x_n$ spełniają warunek $W_{\delta_1,\ldots,\delta_n}(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ oraz

$$\frac{W_{\theta_1,\ldots,\theta_n}(x_1, \ldots, x_n)}{W_{\delta_1,\ldots,\delta_n}(x_1, \ldots, x_n)} \in K(F_1, \ldots, F_n)$$

  dla dowolnie wybranych n operatorów $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \Theta(n+1)$, z monoidu Θ generowanego przez $\delta_1, \ldots, \delta_n$.

Różniczkowa wersja Twierdzenia Campbella

Twierdzenie 2 (C-H, 2011)

Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki zerowej oraz $F = (F_1, \ldots, F_n) : K^n \to K^n$ odwzorowaniem wielomianowym takim, że $J = \det(J_F) \in K \setminus \{0\}$. Następujące cztery warunki są równoważne:

- Odwzorowanie F jest automorfizmem wielomianowym.
- Ciało różniczkowe $(K(x_1, \ldots, x_n), \{\delta_1, \ldots, \delta_n\})$jest rozszrerzeniem Picarda-Vessiot ciała K.
- Skończone rozszerzenie ciał $K(F_1, \ldots, F_n) \subset K(x_1, \ldots, x_n)$jest rozszerzeniem Galois.
- Elementy $x_1, \ldots, x_n$ spełniają warunek $W_{\delta_1,\ldots,\delta_n}(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ oraz

$$\frac{W_{\theta_1,\ldots,\theta_n}(x_1, \ldots, x_n)}{W_{\delta_1,\ldots,\delta_n}(x_1, \ldots, x_n)} \in K(F_1, \ldots, F_n)$$

  dla dowolnie wybranych n operatorów $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \Theta(n+1)$, z monoidu Θ generowanego przez $\delta_1, \ldots, \delta_n$.

Różniczkowa wersja Twierdzenia Campbella

Twierdzenie 2 (C-H, 2011)

Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki zerowej oraz $F = (F_1, \ldots, F_n) : K^n \to K^n$ odwzorowaniem wielomianowym takim, że $J = \det(J_F) \in K \setminus \{0\}$. Następujące cztery warunki są równoważne:

- Odwzorowanie F jest automorfizmem wielomianowym.
- Ciało różniczkowe $(K(x_1, \ldots, x_n), \{\delta_1, \ldots, \delta_n\})$jest rozszrerzeniem Picarda-Vessiot ciała K.
- Skończone rozszerzenie ciał $K(F_1, \ldots, F_n) \subset K(x_1, \ldots, x_n)$jest rozszerzeniem Galois.
- Elementy $x_1, \ldots, x_n$ spełniają warunek $W_{\delta_1,\ldots,\delta_n}(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ oraz

$$\frac{W_{\theta_1,\ldots,\theta_n}(x_1, \ldots, x_n)}{W_{\delta_1,\ldots,\delta_n}(x_1, \ldots, x_n)} \in K(F_1, \ldots, F_n)$$

  dla dowolnie wybranych n operatorów $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \Theta(n+1)$, z monoidu Θ generowanego przez $\delta_1, \ldots, \delta_n$.

Różniczkowa wersja Twierdzenia Campbella

Twierdzenie 2 (C-H, 2011)

Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki zerowej oraz $F=(F_1,\ldots,F_n):K^n\to K^n$ odwzorowaniem wielomianowym takim, że $J=\det(J_F)\in K\setminus\{0\}$. Następujące cztery warunki są równoważne:

- Odwzorowanie F jest automorfizmem wielomianowym.
- Ciało różniczkowe $(K(x_1,\ldots,x_n),\{\delta_1,\ldots,\delta_n\})$jest rozszrerzeniem Picarda-Vessiot ciała K.
- Skończone rozszerzenie ciał $K(F_1,\ldots,F_n)\subset K(x_1,\ldots,x_n)$jest rozszerzeniem Galois.
- Elementy $x_1,\ldots,x_n$ spełniają warunek $W_{\delta_1,\ldots,\delta_n}(x_1,\ldots,x_n)\neq 0$ oraz

$$\frac{W_{\theta_1,\ldots,\theta_n}(x_1,\ldots,x_n)}{W_{\delta_1,\ldots,\delta_n}(x_1,\ldots,x_n)}\in K(F_1,\ldots,F_n)$$

  dla dowolnie wybranych n operatorów $\theta_1,\ldots,\theta_n\in\Theta(n+1)$, z monoidu Θ generowanego przez $\delta_1,\ldots,\delta_n$.

Różniczkowa wersja Twierdzenia Campbella

Biorąc pod uwagę Definicję 1 możemy udowodnić następujące twierdzenie

Twierdzenie 3

Niech K i F będą jak w Twierdzeniu 2. Wówczas poniższe warunki są równoważne:

1) F jest automorfizmem wielomianowym.
2) Macierz

$$W = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_n \\ 0 & \delta_1 x_1 & \dots & \delta_1 x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \delta_n x_1 & \dots & \delta_n x_n \end{bmatrix}$$

jest macierzą fundamentalną następującego systemu całkowalnego

$$\delta_k Y = A_k Y, \quad k = 0, \dots, n,$$

gdzie $\delta_0 = \mathrm{id}$ oraz $A_k \in M_{(n+1)\times(n+1)}(K(F_1, \dots, F_n))$.

Różniczkowa wersja Twierdzenia Campbella

Twierdzenie 3 zadaje efektywną procedurę sprawdzającą czy F jest wielomianowym automorfizmem. Przyjmijmy, że $\det(J_F) = 1$. Wówczas wystarczy sprawdzić, że $A_k = \delta_k W \cdot W^{-1} \in M_{(n+1)\times(n+1)}(K(F_1, \ldots, F_n))$.

Oznaczając $A_k = [a_{ij}^k]$ z elementarnej algebry liniowej otrzymujemy: $a_{i0}^k = 0$ and for $j \geq 1$

$$a_{0j}^k = \begin{vmatrix} \delta_1 x_1 & \delta_1 x_2 & \ldots & \delta_1 x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{j-1} x_1 & \delta_{j-1} x_2 & \ldots & \delta_{j-1} x_n \\ \delta_k x_1 & \delta_k x_2 & \ldots & \delta_k x_n \\ \delta_{j+1} x_1 & \delta_{j+1} x_2 & \ldots & \delta_{j+1} x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_n x_1 & \delta_n x_2 & \ldots & \delta_n x_n \end{vmatrix} = \begin{cases} 0 & ; \quad k \neq j \\ 1 & ; \quad k = j \end{cases}$$

Różniczkowa wersja Twierdzenia Campbella

For $i, j \geq 1$

$$a_{ij}^k = \begin{vmatrix} \delta_1 x_1 & \delta_1 x_2 & \dots & \delta_1 x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{j-1} x_1 & \delta_{j-1} x_2 & \dots & \delta_{j-1} x_n \\ \delta_k \delta_i x_1 & \delta_k \delta_i x_2 & \dots & \delta_k \delta_i x_n \\ \delta_{j+1} x_1 & \delta_{j+1} x_2 & \dots & \delta_{j+1} x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_n x_1 & \delta_n x_2 & \dots & \delta_n x_n \end{vmatrix}.$$

Rozważyliśmy $n(n+1)^2$ wyznaczników. Ponadto odrzucając wyznaczniki, które są stałymi oraz biorąc pod uwagę symetrie wynikające z przemienności różniczkowań pozostaje sprawdzić $\frac{1}{2}n^2(n+1) - n$ wrońskianów. Zatem dla $n = 2$ musimy sprawdzić przynależność do ciała bazowego 4 wrońskianów.

Różniczkowa wersja Twierdzenia Campbella

For $i, j \geq 1$

$$a_{ij}^k = \begin{vmatrix} \delta_1 x_1 & \delta_1 x_2 & \dots & \delta_1 x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{j-1} x_1 & \delta_{j-1} x_2 & \dots & \delta_{j-1} x_n \\ \delta_k \delta_i x_1 & \delta_k \delta_i x_2 & \dots & \delta_k \delta_i x_n \\ \delta_{j+1} x_1 & \delta_{j+1} x_2 & \dots & \delta_{j+1} x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_n x_1 & \delta_n x_2 & \dots & \delta_n x_n \end{vmatrix}.$$

Rozważyliśmy $n(n+1)^2$ wyznaczników. Ponadto odrzucając wyznaczniki, które są stałymi oraz biorąc pod uwagę symetrie wynikające z przemienności różniczkowań pozostaje sprawdzić $\frac{1}{2}n^2(n+1) - n$ wrońskianów. Zatem dla $n = 2$ musimy sprawdzić przynależność do ciała bazowego 4 wrońskianów.

Warunek wystarczający na wielomianową odwracalność

Rozważamy odwzorowanie wielomianowe $F : K^n \to K^n$. Niech będzie dany wielomian $P(X_1, \ldots, X_n) \in K[X] = K[X_1, \ldots, X_n]$, definiujemy dla P ciąg rekurencyjny:

$$\begin{aligned} P_0(X_1, \ldots, X_n) &= P(X_1, \ldots, X_n), \\ P_1(X_1, \ldots, X_n) &= P_0(F_1, \ldots, F_n) - P_0(X_1, \ldots, X_n), \\ &\vdots \\ P_k(X_1, \ldots, X_n) &= P_{k-1}(F_1, \ldots, F_n) - P_{k-1}(X_1, \ldots, X_n). \end{aligned}$$

Lemat

Dla całkowitego i dodatniego m, zachodzi:

$$P(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^l P_l(F_1, \ldots, F_n) + (-1)^m P_m(X_1, \ldots, X_n).$$

W szczególności jeżeli dla pewnego m, $P_m(X_1, \ldots, X_n) = 0$, to wówczas

$$P(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^l P_l(F_1, \ldots, F_n).$$

Warunek wystarczający na wielomianową odwracalność

Wniosek

Niech $F : K^n \to K^n$ będzie odwzorowaniem wielomianowym. Rozważmy ciąg wielomianów (P_k^i) powstałych z $P = X_i$, $i = 1, \ldots, n$. Przypuśćmy, że dla $i = 1, \ldots, n$, istnieje liczba naturalna m_i taka, że $P_{m_i}^i = 0$. Wówczas odwzorowanie odwrotne G dla F zadane jest nastepująco:

$$G_i(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = \sum_{l=0}^{m_i - 1} (-1)^l P_l^i(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n),\ 1 \leq i \leq n.$$

Warunek $P_{m_i}^i = 0$, dla pewnego m_i, $i = 1, \ldots, n$, jest jedynie warunkiem wystarczającym na odwracalność F. Można to zauważyć na następującym przykładzie.

Warunek wystarczający na wielomianową odwracalność

Niech $p := X_1X_3 + X_2X_4$, definiujemy F następująco

$$\begin{cases} F_1 & = & X_1 + pX_4 \\ F_2 & = & X_2 - pX_3 \\ F_3 & = & X_3 + X_4^3 \\ F_4 & = & X_4 \end{cases}$$

Rozpatrujemy F jako wielomianowy automorfizm $\mathbb{K}^4$, gdzie $\mathbb{K}$ jest ciałem charakterystyki zerowej.
Sprawdzamy $P_1^4 = 0$ oraz $P_2^3 = 0$. Jednakże P_j^1 i P_j^2 są niezerowe dla dowolnego j. Aby sprawdzić, że $P_j^1 \neq 0$, wystarczy indukcyjnie sprawdzić, że jednorodny składnik najniższego stopnia Q_{j1}^1 dla P_j^1 ma nastepujacą postać zależną od parzystości indeksu j, dla $j \geq 2$.

$$\begin{array}{rcl} Q_{2k,1}^1 & = & X_1X_4^{4k} \\ Q_{2k+1,1}^1 & = & X_1X_3X_4^{4k+1} + X_2X_4^{4k+2} \end{array}$$

Warunek równoważny odwracalności

Twierdzenie

Niech $F : K^n \to K^n$ będzie odwzorowaniem wielomianowym postaci $F = X + H$, gdzie $H_i(X_1, \dots, X_n)$ jest wielomianem zmiennych $X_1, \dots, X_n$ stopnia D_i oraz rzędu zerowania d_i, przy czym $d_i \geq 2$, dla $i = 1, \dots, n$. Ponadto niech $d = \min d_i$, $D = \max D_i$. Nastepujace trzy warunki są równoważne:

1) F jest wielomianowo odwracalne.

2) Dla $i = 1, \dots, n$ i kazdego $m > \frac{D^{n-1} - d}{d-1} + 1$, zachodzi:

$$\sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j P_j^i(X) = G_i(X) + R_m^i(X).$$

gdzie $G_i(X)$ jest wielomianem stopnia $\leq D^{n-1}$, niezależnie od m, oraz $R_m^i(X)$ jest wielomianem spełniajacym $R_m^i(F) = (-1)^{m+1} P_m^i(X)$ (z rzędem zerowania $> D^{n-1}$).

3) Warunek 2) dla $m = \lfloor \frac{D^{n-1} - d}{d-1} + 1 \rfloor + 1$.

Warunek równoważny odwracalności

Wniosek

Przy założeniach poprzedniego twierdzenia odwzorowanie wielomianowe G odwrotne do F jest zadane następująco:

$$G_i(Y_1, \ldots, Y_n) = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^l \tilde{P}_j^i(Y_1, \ldots, Y_n),\ i = 1, \ldots, n,$$

gdzie $\tilde{P}_j^i$ jest sumą składników jednorodnych wielomianu P_j^i stopnia $\leq D^{n-1}$ oraz $m = \lfloor \frac{D^{n-1}-d}{d-1} + 1 \rfloor + 1$.

Rozszerzenia mocno normalne

$(\mathcal{K}, \Delta_{\mathcal{K}})$ - ciało różniczkowe cząstkowe,
$C = C_{\mathcal{K}} = \bigcap_{i=1}^{n} ker(\partial_i)$ - algebraicznie domknięte ciało stałych.
Niech $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}$ będzie rozszerzeniem ciał różniczkowych skończenie różniczkowo generowanym nad $\mathcal{K}$. Definiujemy *Δ-izomorfizm ciała $\mathcal{L}$ nad $\mathcal{K}$* jako Δ-izomorfizm $\sigma : \mathcal{L} \to M$ w pewne różniczkowe rozszerzenie M ciała $\mathcal{L}$ taki, że $\sigma|_{\mathcal{K}} = \mathrm{id}$. Wówczas możemy utworzyć złożenie ciał $\mathcal{L}\sigma\mathcal{L}$ bedące podciałem ciała M.
Oznaczamy $C(\sigma)$ ciało stałych ciała $\mathcal{L}\sigma\mathcal{L}$ oraz D_σ ciało stałych ciała M. Oczywiście $C(\sigma) \subset D_\sigma$.
Mówimy, że Δ-izomorfizm σ jest *mocny*,gdy:

- $\sigma|_{C_{\mathcal{L}}} = \mathrm{id}$,
- $\mathcal{L}\sigma\mathcal{L} = \mathcal{L}C(\sigma) = \sigma\mathcal{L}C(\sigma)$.

Rozszerzenia mocno normalne

$(\mathcal{K}, \Delta_{\mathcal{K}})$ - ciało różniczkowe cząstkowe,
$C = C_{\mathcal{K}} = \bigcap_{i=1}^{n} ker(\partial_i)$ - algebraicznie domknięte ciało stałych.
Niech $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}$ będzie rozszerzeniem ciał różniczkowych skończenie różniczkowo generowanym nad $\mathcal{K}$. Definiujemy *Δ-izomorfizm ciała $\mathcal{L}$ nad $\mathcal{K}$* jako Δ-izomorfizm $\sigma : \mathcal{L} \to M$ w pewne różniczkowe rozszerzenie M ciała $\mathcal{L}$ taki, że $\sigma|_{\mathcal{K}} = \mathrm{id}$.
Wówczas możemy utworzyć złożenie ciał $\mathcal{L}\sigma\mathcal{L}$ bedące podciałem ciała M.
Oznaczamy $C(\sigma)$ ciało stałych ciała $\mathcal{L}\sigma\mathcal{L}$ oraz D_σ ciało stałych ciała M. Oczywiście $C(\sigma) \subset D_\sigma$.
Mówimy, że Δ-izomorfizm σ jest *mocny*,gdy:

- $\sigma|_{C_{\mathcal{L}}} = \mathrm{id}$,
- $\mathcal{L}\sigma\mathcal{L} = \mathcal{L}C(\sigma) = \sigma\mathcal{L}C(\sigma)$.

Rozszerzenia mocno normalne

Definicja

Rozszerzenie ciał różniczkowych $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}$ nazywamy *mocno normalnym*, gdy jest różniczkowo skończenie generowane nad $\mathcal{K}$ oraz każdy Δ-izomorfizm ciała $\mathcal{L}$ nad $\mathcal{K}$ jest mocny.

Twierdzenie (Kryterium Kovacica)

Niech $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}$ będzie rozszerzeniem, które jest różniczkowo skończenie generowane nad $\mathcal{K}$ oraz zachodzi, że $C_{\mathcal{L}} = C_{\mathcal{K}}$. Załóżmy ponadto, że każdy Δ-izomorfizm ciała $\mathcal{L}$ nad $\mathcal{K}$ spełnia warunek $\sigma\mathcal{L} \subset \mathcal{L}D_\sigma$, gdzie D_σ jest ciałem stałych. Wówczas $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}$ jest rozszerzeniem mocno normalnym.

Dowód: ***Proposition 12.5*** w pracy

J. J. Kovacic, *The differential Galois theory of strongly normal extensions*, T.A.M. Soc. 355 (2003), 4475-4522.

Rozszerzenia mocno normalne

Oznaczmy $R = C[X_1, \ldots, X_n]$ oraz $K = C(X_1, \ldots, X_n)$. Niech E będzie pierścieniem stałych pierścienia $(K \otimes_C R, \{\widetilde{\delta}_1, ..., \widetilde{\delta}_n\})$, gdzie $\{\widetilde{\delta}_1, ..., \widetilde{\delta}_n\}$ są naturalnymi rozszerzeniami derywacji $\{\delta_1, ..., \delta_n\}$ na iloczyn tensorowy. Definiujemy różniczkowy homomomorfizm:

$$\phi : K \otimes_C E \to K \otimes_C R, \quad \phi(a \otimes d) = (a \otimes 1)d.$$

Pokażemy, że ϕ jest monomorfizmem w oparciu o następujący:

Lemat

Odwzorowanie

$$h : E \to K \otimes_C E, \quad h(d) = 1 \otimes d,$$

indukuje bijekcję między zbiorem $\mathcal{I}(E)$ ideałów pierścienia E oraz zbiorem $\mathcal{I}(K \otimes_C E)$ różniczkowych ideałów pierścienia $K \otimes_C E$.

Rozszerzenia mocno normalne

Dowód lematu, niech:

$$\Phi : \mathcal{I}(E) \to \mathcal{I}(K \otimes_C E), \quad \Phi(\mathfrak{a}) = K \otimes_C \mathfrak{a},$$

oraz

$$\Psi : \mathcal{I}(K \otimes_C E) \to \mathcal{I}(E), \quad \Psi(\mathfrak{b}) = \{d \in E \mid 1 \otimes d \in \mathfrak{b}\}.$$

1. Najpierw dowodzimy, że
$\Psi(\Phi(\mathfrak{a})) = \Psi(K \otimes \mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$, $\Psi(K \otimes \mathfrak{a}) \supset \mathfrak{a}$ jest oczywiste. Weźmy bazę Λ C-przestrzeni wektorowej $\mathfrak{a}$ i rozszerzmy do bazy M C-przestrzeni E. Wtedy $1 \otimes M$ jest bazą K-przestrzeni $K \otimes_C E$. Weźmy $d \in \Psi(\Phi(\mathfrak{a}))$, wówczas $1 \otimes d \in K \otimes_C \mathfrak{a}$, zatem

$$1 \otimes d = \sum_{\lambda \in \Lambda} r_\lambda \otimes \lambda, \quad r_\lambda \in K$$

oraz $d = \sum_{\mu \in M} c_\mu \mu$, $c_\mu \in C$, stąd $1 \otimes d = \sum_{\mu \in M} 1 \otimes c_\mu \mu$.
Zatem $c_\mu = 0$ dla $\mu \in M \setminus \Lambda$ i $r_\lambda = c_\lambda$, czyli $d \in \mathfrak{a}$.

Rozszerzenia mocno normalne

2. Pokażemy: $\Phi(\Psi(\mathfrak{b})) = K \otimes \Psi(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}$. Zawieranie $K \otimes \Psi(\mathfrak{b}) \subset \mathfrak{b}$ jest oczywiste. Gdyby $\mathfrak{b} \setminus K \otimes \Psi(\mathfrak{b}) \neq \varnothing$, to bierzemy bazę Λ dla Ψ $(\mathfrak{b})$ nad C i rozszerzamy do bazy M C-przestrzeni E. Bierzemy $a \in \mathfrak{b} \setminus K \otimes \Psi(\mathfrak{b})$, którego reprezentacja

$$a = \sum_{\mu \in M} r_\mu \otimes \mu, \quad r_\mu \in K$$

ma najmniejszą ilość składników niezerowych. $\mathfrak{b}$ jest ideałem różniczkowym, więc dla derywacji $\widetilde{\delta}$ mamy $\widetilde{\delta} a = \sum_{\mu \in M} \delta r_\mu \otimes \mu \in \mathfrak{b}$. Ponieważ $a \neq 0$, weźmy μ_0 takie, że $r_{\mu_0} \neq 0$.

$$K \otimes \Psi(\mathfrak{b}) \ni \delta r_{\mu_0} a - r_{\mu_0} \delta a = \delta r_{\mu_0} \Big(\sum_{\mu \in M} r_\mu \otimes \mu \Big) - r_{\mu_0} \Big(\sum_{\mu \in M} \delta r_\mu \otimes \mu \Big) =$$

$$= \sum_{\mu \in M, \mu \neq \mu_0} (\delta r_{\mu_0} r_\mu - r_{\mu_0} \delta r_\mu) \otimes \mu = \sum_{\mu \in \Lambda, \mu \neq \mu_0} (\delta r_{\mu_0} r_\mu - r_{\mu_0} \delta r_\mu) \otimes \mu.$$

Rozszerzenia mocno normalne

Ostatnia równość zachodzi bo $\delta r_{\mu_0} r_\mu - r_{\mu_0} \delta r_\mu = 0$ dla $\mu \in M \setminus \Lambda$, ze względu na wybór a, więc $\delta(\frac{r_\mu}{r_{\mu_0}}) = 0$ dla $\mu \in M \setminus \Lambda$. Czyli $\frac{r_\mu}{r_{\mu_0}}$ jest stałą w K. Zatem istnieje $c_\mu \in C$ takie, że $r_\mu = c_\mu r_{\mu_0}$ dla $\mu \in M \setminus \Lambda$. Stąd

$$a = \sum_{\mu \in M \setminus \Lambda} c_\mu r_{\mu_0} \otimes \mu + \sum_{\mu \in \Lambda} r_\mu \otimes \mu.$$

Ponieważ $\sum_{\mu \in \Lambda} r_\mu \otimes \mu \in K \otimes \Psi(\mathfrak{b}) \subset \mathfrak{b}$, to

$$\mathfrak{b} \ni \sum_{\mu \in M \setminus \Lambda} c_\mu r_{\mu_0} \otimes \mu = (r_{\mu_0} \otimes 1)(1 \otimes \sum_{\mu \in M \setminus \Lambda} c_\mu \mu).$$

K jest ciałem, zatem $1 \otimes d_0 \in \mathfrak{b}$, dla $d_0 = \sum_{\mu \in M \setminus \Lambda} c_\mu \mu$. Stąd $d_0 \in \Psi(\mathfrak{b})$ oraz $(r_{\mu_0} \otimes 1)(1 \otimes d_0) \in K \otimes \Psi(\mathfrak{b})$. Mamy więc sprzeczność z założeniem, że $a \in \mathfrak{b} \setminus K \otimes \Psi(\mathfrak{b})$ $\square$

Rozszerzenia mocno normalne

Twierdzenie

Odwzorowanie

$$\phi : K \otimes_C E \to K \otimes_C R, \quad \phi(a \otimes d) = (a \otimes 1)d$$

jest monomorfizmem.

Dowód. Oznaczmy $\mathfrak{b} = \ker \phi$. Z lematu mamy $\mathfrak{b} = K \otimes \mathfrak{c}$, gdzie $\mathfrak{c} \in \mathcal{I}(E)$. Biorąc $c \in \mathfrak{c}$, otrzymujemy

$$0 = \phi(1 \otimes c) = (1 \otimes 1)c = c.$$

Stąd $c = 0$ i $\mathfrak{b} \simeq K \otimes (0)$.
$\square$

Rozszerzenia mocno normalne versus (JC)

Rozważamy odwzorowanie $\phi : K \otimes_C E \to K \otimes_C R$ oraz rozszerzenie $C \subset \left(C(X_1, \ldots, X_n), \{\delta_1, \ldots, \delta_n\} \right)$.

Twierdzenie

Niech C, K, R oraz ϕ będą jak wyżej. Jeżeli odwzorowanie ϕ jest izomorfizmem, to $C \subset K$ jest rozszerzeniem mocno normalnym.

Dowód. Rozszerzenie $C \subset K = C(X_1, \ldots, X_n)$ jest skończenie różniczkowo generowane. Sprawdzamy założenia Kryterium Kovacica, tzn. $\sigma K \subset KD_\sigma$. Niech σ będzie dowolnym Δ-izomorfizmem K nad C (załóżmy, że $\sigma : K \to M$, gdzie M jest dowolnym rozszerzeniem różniczkowym ciała K). Definiujemy $\overline{\sigma} : K \otimes_C R \to M$ na generatorach: $\overline{\sigma}(a \otimes b) = a\sigma(b)$. Oznaczmy $\psi = \overline{\sigma} \circ \phi$. Wtedy $\psi : K \otimes_C E \to M$. Zauważmy, że $\psi(K \otimes 1) \subset K$. Bowiem dla $a \in K$ mamy:

Rozszerzenia mocno normalne versus (JC)

$$\psi(a \otimes 1) = \overline{\sigma} \circ \phi(a \otimes 1) = \overline{\sigma}(a \otimes 1) = a.$$

Ponieważ elementy E są stałymi , to $\psi(1 \otimes E) \subset D_\sigma$, gdzie D_σ jest ciałem stałych, czyli

$$\psi(K \otimes_C E) = \psi\big((K \otimes 1)(1 \otimes E)\big) \subset KD_\sigma.$$

Mamy zatem następujący diagram komutatywny

$$\begin{tikzcd}
K \otimes_C E \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\psi"'] & K \otimes_C R \arrow[d, "\overline{\sigma}"] \\
& KD_\sigma
\end{tikzcd}$$

z którego wynika, że $\sigma K \subset KD_\sigma$. Zatem Kryterium Kovacica implikuje, że $C \subset \big(C(X_1, \ldots, X_m), \{\delta_1, \ldots, \delta_n\}\big)$ jest rozszerzeniem mocno normalnym $\square$

Rozszerzenia mocno normalne versus (JC)

Z ostatniego twierdzenia wynika następujący

Wniosek

Jezeli rozważymy różniczkowe ciało pośrednie $k = C(F_1, \ldots, F_n)$, to rozszerzenie $k \subset K$ jest także mocno normalne. Ponieważ jest to również rozszerzenie algebraiczne, więc jest rozszerzeniem Picarda-Vessiota.